OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

$G=(-1,1)$ împreună cu operaţia $x\star y=\frac{x+y}{xy+1}$, $(\forall)x,y\in G$ formează o structură de grup abelian......1p

Fie $f:G\longrightarrow G_1$, $f(x)=ax+b$ o funcţie bijectivă şi $f(x\star y)=f(x)\perp f(y)$ şi fie $g:G\longrightarrow G_2$, $g(x)=x^{2n+1}$ o funcţie bijectivă şi $g(x\star y)=g(x)\top g(y)$.......5p

Rezultă $\left(G_1,\perp\right)$ şi $\left(G_2,\top\right)$ sunt grupuri abeliene izomorfe.......1p

SUBIECTUL II

a) Fie H o submulţime a lui G cu cel puţin $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ elemente. Fie $a\in G$ un element oarecare. Considerăm funcţia $f:H\longrightarrow G$, $f(x)=ax^{-1}$.......1p

Se observă imediat că funcţia f este injectivă, deci $card(Imf)=card(H)\geq\left[\frac{n}{2}\right]+1$, deci $Imf\cap H$ are cel puţin un element $y\Longrightarrow$ există $x\in H$ astfel încât $f(x)=y\Longrightarrow ax^{-1}=y\Longrightarrow a=yx$, ceea ce trebuia demonstrat......3p

b) Fie $K=\{e,a,b,c\}$ grupul lui Klein. Mulţimea $H=\{e,a\}$ este subgrup al lui K, deci nu este generator pentru K......3p

SUBIECTUL III

În demonstraţie vom folosi *inegalitatea Cebîsev* pentru funcţii de monotonii diferite, adică $\int_a^b f\cdot\int_a^b g\geq(b-a)\int_a^b f\cdot g$......2p

Astfel, $\int_0^1\frac{\ln(1+2x)}{1+3x^2}dx\leq\int_0^1\ln(1+2x)dx\cdot\int_0^1\frac{1}{1+3x^2}dx$.....1p

Dar $\int_0^1\ln(1+2x)dx=\frac{3}{2}\ln 3-1$, iar $\int_0^1\frac{1}{1+3x^2}dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.....3p. După calcule se ajunge la rezultatul căutat......1p

SUBIECTUL IV

$\int_0^n\frac{[x]}{[x]^2+3[x]+2}dx=\int_0^1\frac{0}{2}dx+\int_1^2\frac{1}{1+2+3}dx+\int_2^3\frac{2}{4+6+2}dx+...+\int_{n-1}^n\frac{n-1}{n(n+1)}dx=$
$\frac{0}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...\frac{n-1}{n(n+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{2}{n+1}-\frac{1}{2}$.....5p

Astfel, $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}-2+\ln n-\ln(n+1)\right)=c_n-2$......2p